ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1979

T.A.

Mathématiques I - (option T.A.) (annulée)

I

On pose, pour k entier relatif :

$$u_k(t) = e^{-1/t}\, t^{k-2} \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } u_k(0) = 0.$$

1°) Trouver les limites de $u_k(t)$ lorsque t tend vers zéro par valeurs positives, puis par valeurs négatives.

Montrer que u_k est indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

2°) Montrer que, pour $x > 0$, on a : $\int_0^x u_2(t)\, dt \leqslant x^2\, e^{-1/x}$.

Trouver un équivalent simple de $e^{1/x} \int_0^x u_1(t)\, dt$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives (On pourra utiliser une intégration par parties).

3°) a- Construire la représentation graphique de la restriction à $[-1,0[$ de la fonction $(-1)^k u_k$ pour $k > 2$.

Montrer que, k > 2 étant fixé, on peut déterminer a_k tel que les inégalités $a_k \leqslant x < 0$ et $-1 \leqslant t \leqslant x$ entrainent $(-1)^k u_k(t) \leqslant (-1)^k u_k(x)$.

En déduire que, toujours pour $a_k \leqslant x < 0$, on a : $0 \leqslant e^{1/x} \int_{-1}^x (-1)^k u_k(t)\, dt \leqslant |x|^{k-2}$

b- Pour $x \in [-1,0[$ et $k \geqslant 1$, on pose $I_k(x) = \int_{-1}^x u_k(t)\, dt$.

Etablir une relation entre $I_k(x)$ et $I_{k+1}(x)$, ainsi qu'une relation entre $I_k(x)$ et $I_{k+2}(x)$.

Montrer que :

$$\frac{1}{x^{k-1}}\, e^{1/x} \int_{-1}^x u_k(t)\, dt$$ tend vers 0 lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives, avec $k \geqslant 1$.

Montrer qu'on peut écrire : $e^{1/x} \int_{-1}^x u_1(t)\, dt = x - x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives.

4°) a- Montrer que, pour tout u réel : $1 + u \leqslant e^u \leqslant 1 + u\, e^u$.

b- Trouver un encadrement de $\int_1^x u_1(t)\, dt$ pour $x > 1$; en déduire un équivalent, aussi simple que possible, de cette intégrale lorsque x tend vers $+\infty$; étendre le résultat à $\int_0^x u_1(t)\, dt$.

c- Trouver un encadrement de $\int_{-1}^x u_1(t)\, dt$ pour $x < -1$; en déduire un équivalent, aussi simple que possible, de cette intégrale lorsque x tend vers $-\infty$.

II

On se propose de déterminer les solutions de l'équation différentielle

(E) $\qquad x^2 y' + y = x$

sur divers intervalles.

1°) Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ (l'expression des solutions contient une intégrale dont une borne dépend de x).

Donner la forme des courbes intégrales (on distinguera trois cas). Déterminer et construire l'ensemble des points de ces courbes en lesquels la tangente est parallèle à Ox, ainsi que l'ensemble de leurs points d'inflexion.

2°) Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$ et répondre aux mêmes questions qu'en 1°) (On n'aura ici à envisager qu'une seule forme de courbes).

3°) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un espace affine que l'on déterminera. Construire sur la même figure les représentations graphiques de deux éléments de cet ensemble.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail